11 3º ESO

CUERPOS GEOMÉTRICOS

Contenido

1. POLIEDROS REGULARES Y SEMIRREGULARES

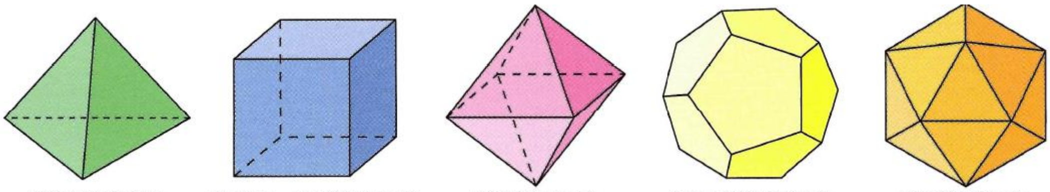
Poliedro: Cuerpo o sólido limitado por caras poligonales. Para "cerrar" un vértice necesitamos al menos tres caras. Con dos caras tenemos un diedro, determinan una arista. Cortando dicha arista con un plano secante a los otros dos ya se cerraría el sólido en ese vértice.

Sus elementos son: vértices (punto en el que concurren tres o más aristas), aristas (intersección de dos caras) y caras (polígonos que limitan la figura).

Poliedro regular sus caras son polígonos regulares idénticos y en cada vértice concurren el mismo número de caras (dos tetraedros unidos por una cara cumplirían el estar formado por polígonos regulares iguales, pero no sería un poliedro regular). Pueden ser convexos o no.

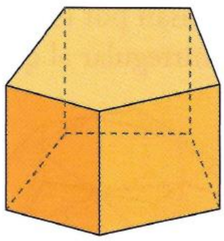
Sólo existen 5 poliedros regulares: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro.

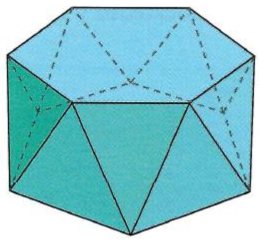
Los convexos sólo son 5. Los sólidos de Platón.



TETRAEDRO 4 caras, triángulos — CUBO o HEXAEDRO 6 caras, cuadrados — OCTAEDRO 8 caras, triángulos — DODECAEDRO 12 caras, pentágonos — ICOSAEDRO 20 caras, triángulos

Poliedro semirregular sus caras son polígonos regulares iguales de dos o más tipos y en cada vértice concurren los mismos polígonos. Las aristas tienen que medir todas lo mismo.





FÓRMULA DE EULER PARA UN POLIEDRO CONVEXO:

c + v = a + 2 (Carlos V, Austria 2º)

Partiendo de Euler se pueden deducir los 5 sólidos regulares.

Triángulos equiláteros:

3 triángulos por vértice:

Nº de caras: c	**número de vértices: v**	**número de aristas: a**	**+2**
N	$\frac{3n}{3}$ (cada triángulo aporta 3 vértices que en el poliedro se agrupan de 3 en 3)	$\frac{3n}{2}$ (Cada triángulo aporta 3 aristas que en el poliedro se agrupan de 2 en 2)	2

De esta manera nos quedaría la ecuación:

$$n + \frac{3n}{3} = \frac{3n}{2} + 2. \textit{ Cuya única solución es } n = 4. \textit{ Tetraedro.}$$

4 triángulos por vértice:

número de caras: c	número de vértices	número de aristas	+2
N	$\frac{3n}{4}$	$\frac{3n}{2}$	2

De esta manera nos quedaría la ecuación:

$n+\frac{3n}{4}=\frac{3n}{2}+2.$ *Cuya única solución es* $n=8$. *Octaedro.*

5 triángulos por vértice:

número de caras: c	número de vértices	número de aristas	+2
N	$\frac{3n}{5}$	$\frac{3n}{2}$	2

De esta manera nos quedaría la ecuación:

$n+\frac{3n}{5}=\frac{3n}{2}+2.$ *Cuya única solución es* $n=20$. *Icosaedro.*

6 triángulos por vértice:

Imposible.

Cuadrados:

3 cuadrados por vértice:

número de caras: c	número de vértices	número de aristas	+2
N	$\frac{4n}{3}$ (cada cuadrado aporta 4 vértices que en el poliedro se agrupan de 3 en 3)	$\frac{4n}{2}$ (Cada cuadrado aporta 4 aristas que en el poliedro se agrupan de 2 en 2)	2

De esta manera nos quedaría la ecuación:

$$n+\frac{4n}{3}=\frac{4n}{2}+2.\ \textit{Cuya única solución es } n=6.\ \textit{Hexaedro o cubo.}$$

Con más caras por vértice es imposible.

3 pentágonos regulares por vértice:

número de caras: c	número de vértices	número de aristas	+2
N	$\frac{5n}{3}$ (cada pentágono aporta 5 vértices que en el poliedro se agrupan de 3 en 3)	$\frac{5n}{2}$ (Cada pentágono aporta 5 aristas que en el poliedro se agrupan de 2 en 2)	2

De esta manera nos quedaría la ecuación:

$$n+\frac{5n}{3}=\frac{5n}{2}+2.\ \textit{Cuya única solución es } n=12.\ \textit{Dodecaedro.}$$

Con más caras por vértice es imposible.

Con poliedros de orden superior es imposible porque el hexágono ya tiene de ángulo interior 120º.

Ejercicio:

Hacer una tabla que recoja el número de caras, vértices y aristas de los cinco sólidos platónicos.

2. TRUNCANDO POLIEDROS

Resulta de cortar cada vértice por un plano a cierta distancia de él.

SECCIONES DE POLÍGONOS REGULARES

Los dos casos que vamos a considerar es el corte de un polígono regular (caras de los poliedros):

1. Por los puntos medios de los lados.
2. Formando un polígono regular.

Truncamiento por el punto medio de los lados

Poner la relación de Arquímedes del poliedro en cuestión. Luego pensar en el número de caras nuevas que es una más por vértice. Después en el número nuevo de vértices, que es tantos por vértice como su orden; es decir, según el número de caras que concurren en él. Y luego dividido entre dos puesto que cada nuevo vértice está en una arista y la arista es común a dos vértices.

Así se puede deducir el número de caras, vértices, aristas (deducido por la de Euler).

Luego pensando un poco se puede deducir que tipo de poliedro es. Pensar en las caras que concurren en cada vértice y de qué tipo son.

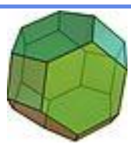
Truncamiento formando un polígono regular

Otra posibilidad es hacerlo para conseguir en las nuevas caras polígonos regulares.

Sólidos arquimedianos

Los sólidos arquimedianos o sólidos de Arquímedes son un grupo de poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos. Todos los sólidos de Arquímedes son de vértices uniformes. La mayoría de ellos se obtienen truncando los sólidos platónicos. Arquímedes describió ampliamente estos cuerpos en trabajos que fueron desapareciendo, fue recién en el Renacimiento cuando artistas y matemáticos los redescubrieron.

Siete sólidos arquimedianos se pueden obtener truncando sólidos platónicos: el tetraedro truncado, el cuboctaedro, el cubo truncado, el octaedro truncado, el icosidodecaedro, el dodecaedro truncado y el icosaedro truncado.

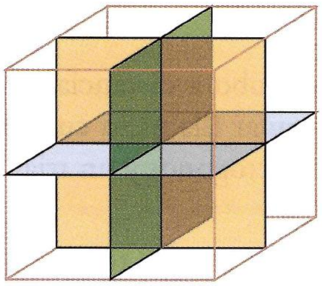
Sólidos arquimedianos						
Nombre	**Imagen**	**Caras**		**Aristas**	**Vértices**	**Grupo puntual**
Tetraedro truncado	 Animación	8	4 × hr 4 × te	18	12 × (3,6,6)	T_d
Cuboctaedro	 Animación	14	6 × cu 8 × te	24	12 × (3,4,3,4)	O_h
Cubo truncado	 Animación	14	6 × or 8 × te	36	24 × (3,8,8)	O_h
Octaedro truncado	 Animación	14	8 × hr 6 × cu	36	24 × (4,6,6)	O_h
Icosidodecaedro	 Animación	32	12 × pr 20 × te	60	30 × (3,5,3,5)	I_h
Dodecaedro truncado	 Animación	32	12 × dr 20 × te	90	60 × (3,10,10)	I_h
Icosaedro truncado	 Animación	32	20 × hr 12 × pr	90	60 × (5,6,6)	I_h

dr = decágonos regulares; or = octógonos regulares; hr = hexágonos regulares
pr = pentágonos regulares; cu = cuadrados; te = triángulos equiláteros

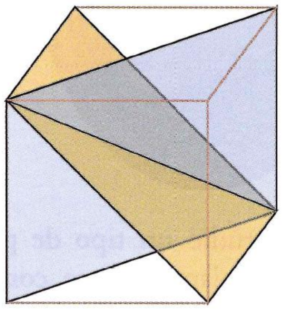
Dado que en los vértices de los sólidos arquimedianos se encuentran varios tipos de polígonos se ha buscado una manera de nombrar la forma de los vértices; se dice por ejemplo que un vértice tiene configuración (5,5,3) cuando en el vértice se encuentran dos pentágonos y un triángulo, como en el icosidodecaedro. Este sistema se aplica también para las demás familias de poliedros.

3. PLANOS DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA

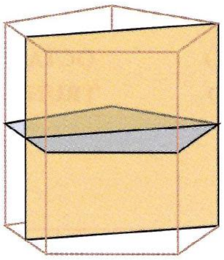
Son los planos que dividen al cuerpo en dos partes simétricas respecto de él.



El cubo tiene tres planos de simetría. Cada uno es paralelo a dos de sus caras.

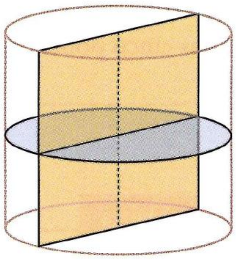


Cada dos aristas opuestas determinan un plano que es plano de simetría. El cubo tiene, por tanto, otros seis planos de simetría.



El prisma pentagonal regular tiene cinco planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases.

Y otro plano de simetría paralelo a las dos bases.



Cualquier plano que contiene al eje del cilindro es plano de simetría de este. Hay, pues, infinitos.

Además hay un plano de simetría paralelo a las bases.

4. EJE DE GIRO DE UNA FIGURA

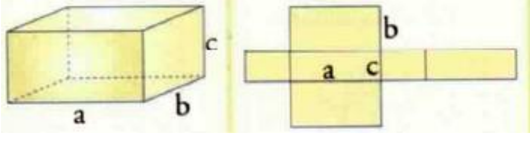
Eje respecto al cual el cuerpo repite su posición un número de veces en el giro de 360º. Al número de veces que se repite se le llama orden del eje de giro.

5. SUPERFICIE DE CUERPOS GEOMÉTRICOS Y VOLUMEN

AREA AND VOLUME FOR THE CUBOID, THE PRISM AND THE CYLINDER

CUBOID

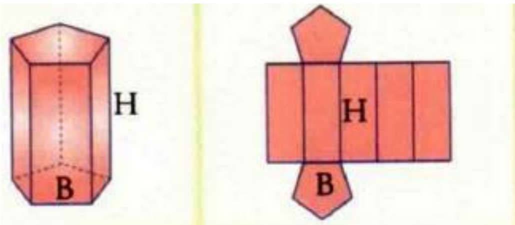
The cuboid area is the sum of its six faces.
The cuboid volume is the result of multiplying the three dimensions.



$A = 2(ab + ac + bc)$ $V = abc$

PRISM

The area of a prism is the result of adding up the areas of the faces.
The volume is the result of multiplying the base area by the height.



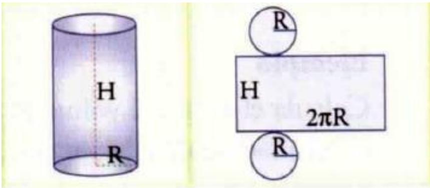
$$A_T = 2A_B + A_L$$

$$V = A_B \cdot H$$

CYLINDER

The cylinder area is the result of adding up the two base areas and the rectangle that forms the lateral face.

The volume is the result of multiplying the base area by the ____________.



$$A_B = \pi R^2$$
$$A_L = 2\pi RH$$
$$A_T = 2A_B + A_L$$

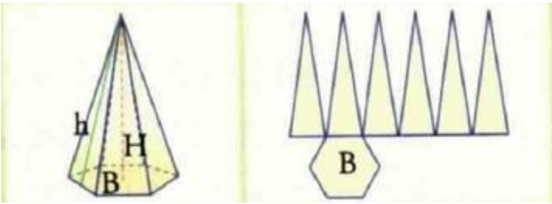
$$V = A_B \cdot H$$

AREA AND VOLUME FOR THE PYRAMID, THE CONE AND THE SPHERE

PYRAMID

The total area for the pyramid is the base area plus the lateral area.

The volume is obtained by multiplying one third by the area base by the height.



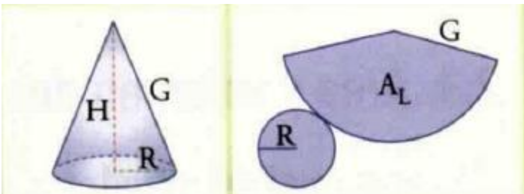
$$A_T = A_B + A_L$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

CONE

The total area for the cone is the base area –a circle- plus the lateral area –a circular sector- or circular triangle

The volume is obtained by multiplying one third by the area base by the height.



$$A_B = \pi R^2$$
$$A_L = \pi RG$$
$$A_T = A_B + A_L$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

SPHERE

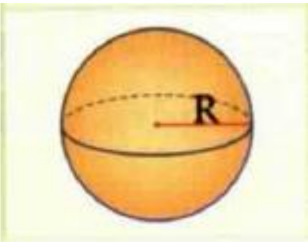
The sphere is not flattened on a plane surface. However, we know the formula for this area.

The volume is obtained by multiplying four thirds by π by cubed radius.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $S = 4\pi r^2$

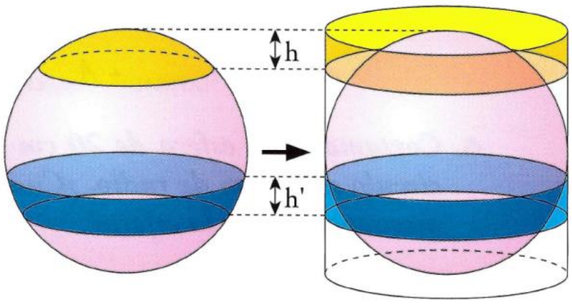
La esfera tiene la misma superficie lateral que un cilindro que tuviese el mismo radio y altura que la base. De aquí se podrían sacar consecuencias sobre la superficie de una zona esférica (superficie comprendida entre dos "paralelos") ya la de un casquete esférico (superficie comprendida entre un polo y un "paralelo")

El huso (superficie comprendida entre dos meridianos) y la cuña (volumen comprendido entre dos meridianos) se halla por proporcionalidad con el ángulo que define el huso o la cuña.

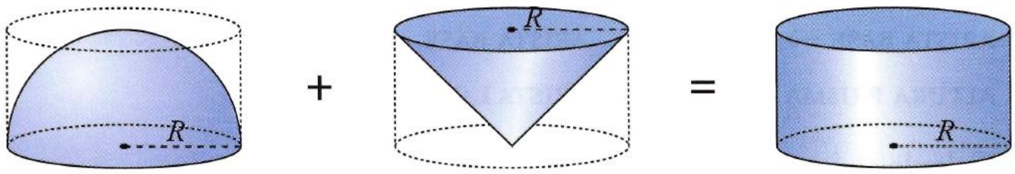


$$A = 4\pi R^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

CASQUETE ESFÉRICO Y ZONA ESFÉRICA ÁREA



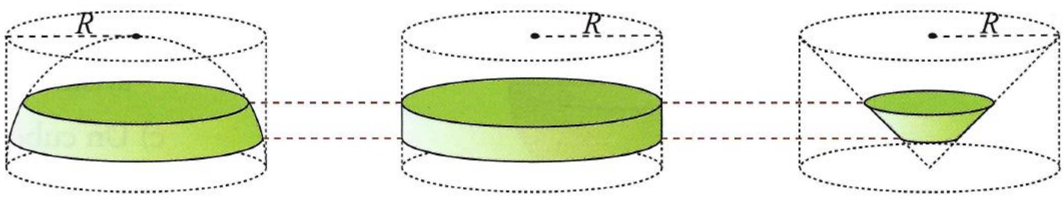
$$A_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = 2\pi r \cdot h$$
$$A_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi r \cdot h'$$



$$V_{\text{SEMIESFERA}} + V_{\text{CONO}} = V_{\text{CILINDRO}}$$

$$\left(\frac{2}{3} V_{\text{CILINDRO}}\right) \qquad \left(\frac{1}{3} V_{\text{CILINDRO}}\right)$$

CASQUETE ESFÉRICO Y ZONA ESFÉRICA. VOLUMEN

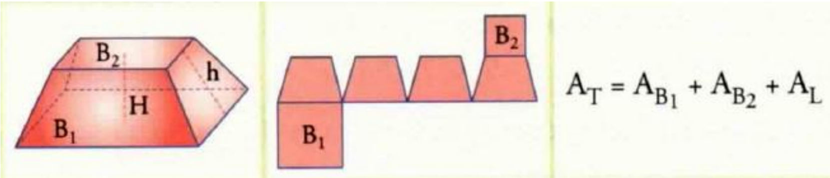


$$V_{\text{PORCIÓN DE ESFERA}} = V_{\text{PORCIÓN DE CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}}$$

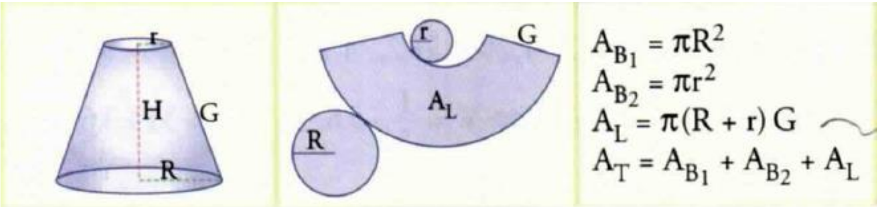
AREA AND VOLUME FOR A FRUSTUM

The total area for a frustum is deduced from the unfolding. It is the sum of the two bases plus the lateral area.

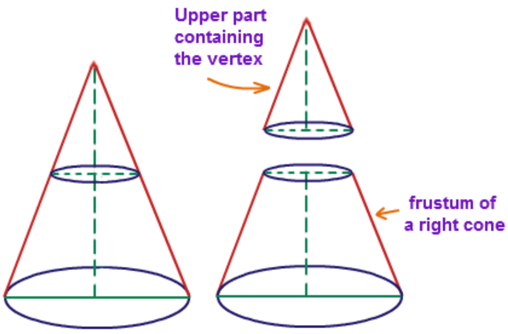
In a pyramidal frustum the lateral area is formed by trapeziums.



In a conical frustum the lateral area is a circular trapezium.



The volume could be deduced by taking away the volume of the virtual cone formed from the smallest base to the virtual apex, from the virtual cone formed by the larger base to the virtual apex.



It is similar for the pyramid frustum.

6. DEFINICIONES BÁSICAS

PRISMAS

Prisma: Poliedro formado por dos bases que son polígonos iguales y paralelos y las restantes caras paralelogramos limitador por aristas que unen los vértices correspondientes de las dos bases.

Clasificación según el polígono de las bases: triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal.

Clasificación según la forma: regular (lo son las bases), recto (aristas laterales perpendiculares a las bases) y oblicuo (en caso contrario).

Paralelepípedo: Prisma cuyas bases son paralelogramos.

PIRÁMIDES

Poliedro en el que una cara es un polígono y las restantes son triángulos con un vértice común (vértice de la pirámide).

Clasificación según el polígono de la base: triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal.

Clasificación según la forma: regular o recta si lo es su base (polígono regular) y todas las aristas laterales son de igual longitud. En este caso la altura cae en el centro de la base. Oblicua en caso contrario.

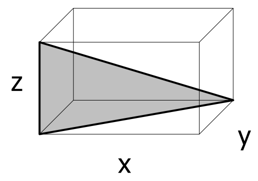
Apotema: En un polígono, la perpendicular desde el centro a uno de sus lados.

En una pirámide, la perpendicular que une el vértice con uno de los lados de la base.

PITÁGORAS EN PRISMAS Y PIRÁMIDES

Diagonal de un ortoedro:

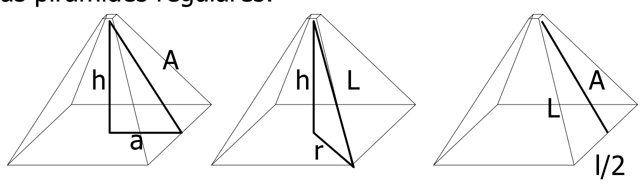
$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Apotema y altura de una pirámide

Tenemos las siguientes relaciones para las pirámides regulares:

$$A^2 = h^2 + a^2; \quad L^2 = h^2 + r^2; \quad L^2 = A^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$



SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

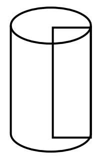
Son los cuerpos que se obtienen al girar un recinto plano alrededor de un eje situado en el mismo plano describiendo cada punto una circunferencia completa.

Se llama eje del sólido al eje de giro.

Se llama generatriz del sólido a cada una de las rectas que lo generan.

CILINDRO

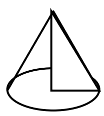
Sólido de revolución producido por el giro de un rectángulo sobre un lado.



CONO

Sólido de revolución producido por el giro de un triángulo rectángulo que gira sobre un cateto.

También se pueden usar los resultados anteriores (Pitágoras, longitud circunferencia, área círculo,…) para hallar sus elementos.



7. **WEBS INTERESANTES**

Matemáticas visuales:

http://www.matematicasvisuales.com/index.html

Sección del cuadrado y cubo truncado:

http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/espacio/truncatedcubeoctahedron.html

Truncamiento del octaedro:

http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/espacio/truncatedcubeoctahedron.html

Está hacia mitad de la página.

Truncamiento del cubo y octaedro

http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/espacio/truncatedcubeoctahedron.html

Sección del triángulo equilátero y tetraedro truncado:

http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/espacio/truncatedtetrahedron.html

Sólidos arquimedianos:

https://es.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3lidos_arquimedianos